

## **MODELAGEM MATEMÁTICA DA PRODUÇÃO DE LEITE NO BRASIL: UMA APLICAÇÃO DE CONHECIMENTOS ADQUIRIDOS DURANTE UM CURSO DE GRADUAÇÃO**

**LUCAS MORAIS MELO<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ). Graduando em Licenciatura em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus Formiga (IFMG). lucasmmelolp@gmail.com

### **RESUMO**

O objetivo deste artigo é apresentar um modelo matemático que pode ser utilizado para estimar valores anuais da produção brasileira de leite de vaca. Para o desenvolvimento do modelo foram utilizados dados da Pesquisa da Pecuária Municipal (PPM), de 1973 a 2018, anualmente elaborada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). O modelo foi construído via técnica de regressão utilizando recursos computacionais. O erro percentual médio obtido foi de 4,703%, mostrando-se assim que o modelo obtido se ajusta bem aos dados. Para validação do modelo, foram utilizados dados da Pesquisa Trimestral do Leite (PTL), também realizada pelo IBGE. Comparando-se os dados da PTL de 2019 com o valor estimado do modelo para este mesmo ano, chega-se a uma diferença percentual de 6,537%, confirmando que o modelo obtido se ajusta relativamente bem aos dados oficiais. Além disso, este artigo pode ser utilizado para ilustrar uma aplicação de conhecimentos adquiridos durante um curso de graduação, ou seja, pode ser utilizado para fins didáticos.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática; Produção de Leite; Regressão Polinomial.

## **MATHEMATICAL MODELING OF MILK PRODUCTION IN BRAZIL: AN APPLICATION OF KNOWLEDGE ACQUIRED DURING A UNDERGRADUATE COURSE**

### **ABSTRACT**

The objective of this article is to present a mathematical model that can be used to estimate annual values of Brazilian production of cow's milk. For the development of the model, data from the Municipal Livestock Survey (PPM), from 1973 to 2018, used annually by the Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE), were used. The model was built using the regression technique using computational resources. The mean percentage error obtained was 4.703%, thus showing that the model obtained fits well with the data. To validate the model, data from the Quarterly Milk Survey (PTL), also carried out by IBGE, were used. Comparing the PTL of 2019 data with the estimated value of the model for this same year, a percentage difference of 6.537% is reached, confirming that the model obtained fits relatively well to the official data. Also, this article can be used to illustrate an application of knowledge acquired during an undergraduate course, that is, it can be used for teaching purposes.

**Keywords:** Mathematical Modeling; Milk Production; Polynomial Regression.

## 1 INTRODUÇÃO

Por meio de seu “Guia alimentar para a população brasileira”, o Ministério da Saúde considera o consumo de leite de vaca e seus derivados um hábito saudável, não só considera como recomenda o consumo diário desse alimento, exceto, é claro, em casos de intolerância (BRASIL, 2014). A significativa quantidade de cálcio e de proteínas está entre os maiores benefícios nutricionais que o leite pode trazer à alimentação humana. De fato, o leite de vaca é um alimento presente na dieta alimentar de milhões de brasileiros, e como tal, demanda uma produção em alta escala.

Em níveis mundiais, o Brasil figura ao lado de países como os Estados Unidos, a Índia e Rússia, como um dos maiores produtores mundiais de leite. Isto indica que a produção de leite é uma importante atividade econômica para o país. Desse modo, poder estimar valores da produção de um produto relevante para a sociedade brasileira, seja em aspectos nutricionais ou econômicos, torna-se desejável.

Em virtude dos fatos anteriormente citados, este trabalho se propõe a desenvolver, por meio de conhecimentos matemáticos e recursos computacionais, um modelo matemático capaz de estimar a produção brasileira de leite para os próximos anos. Contudo, é importante frisar que estimativas, por definição, podem não ser satisfeitas com o efetivo passar do tempo, principalmente quando o objeto final de estudo envolve aspectos da macroeconomia, visto que desastres e catástrofes a níveis nacionais ou mundiais podem influenciar em tais fatores.

Portanto, o objetivo geral deste trabalho é desenvolver um modelo matemático que seja capaz de realizar previsões da quantidade de leite produzida, a cada ano, no Brasil, considerando um futuro relativamente próximo, isto é, a, no máximo, nos próximos cinco anos, pois, para o desenvolvimento de um modelo matemático capaz de realizar estimativas próximas da realidade e com erros aceitáveis, tornar-se-ia necessário o envolvimento de muitas variáveis, o que acarretaria um modelo mais complexo. Assim sendo, é objetivo específico uma breve discussão da técnica de regressão para ajuste de uma curva, que se ajusta relativamente bem a um conjunto de pontos. Também está entre os objetivos deste trabalho apresentar uma aplicação de conhecimentos adquiridos durante um curso de graduação da área das Ciências Exatas, podendo assim ser utilizado para finalidades didáticas.

Como se sabe, o ajuste de um conjunto de pontos por polinômios de grau maior que 3, aplicando-se a técnica matemática conhecida como Método dos Mínimos Quadrados (MMQ),

torna-se uma atividade excessivamente trabalhosa. Por isso, com o intuito de facilitar o trabalho numérico, neste trabalho, foi utilizado *software*, de amplo acesso, que já possui implementado em sua estrutura métodos similares ou iguais ao MMQ, para efetivamente obter o modelo matemático procurado. Também, com o intuito de facilitar o trabalho numérico de determinar as estimativas, foi utilizada linguagem de programação de livre acesso.

## **2 ASPECTOS RELACIONADOS À MODELAGEM MATEMÁTICA**

### **2.1 Conceitos fundamentais sobre modelagem matemática**

De acordo com Bassanezi (2002, p. 20), um modelo matemático é “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. Logo, segue que uma função pode ser um modelo, por exemplo. No caso deste trabalho, o objeto estudado é a produção anual de leite de vaca no Brasil.

Ainda, segundo Bassanezi (2002, p. 24), “Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências”. Nesse sentido, este trabalho busca o desenvolvimento de um modelo matemático capaz de estimar valores anuais da produção nacional de leite no Brasil.

Pode-se dizer que este trabalho se aproxima de algumas concepções a respeito da modelagem matemática propostas por autores como Burak e Biembengut, pois, para Burak (1992, p. 20), “a Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões”; Biembengut e Hein (2009, p. 12) mantêm uma concepção similar à de Burak, ao afirmar que modelagem é “o processo que envolve a obtenção de um modelo” que possibilita a interação entre matemática e realidade, e que, para tanto, segue-se algumas etapas que envolvem, principalmente, a interação com a situação-problema, a formulação de hipóteses e resolução do problema, e, finalmente, a criação do modelo e sua validação.

Dessa forma, neste estudo, compreende-se a modelagem matemática como um campo de estudo no qual é possível realizar previsões a partir do desenvolvimento de modelos que, por sua vez, são formados por relações matemáticas, seguindo-se etapas de desenvolvimento. Além disso, sustenta-se que a modelagem matemática também pode ser utilizada como uma metodologia auxiliadora do processo de ensino e aprendizagem, pois, segundo Biembengut e

Hein (2009, p. 18), a modelagem também “pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente”, visto que possibilita ao aluno trabalhar com situações-problema através de pesquisa, despertando seu interesse e estimulando seu senso crítico.

## 2.2 Técnicas de modelagem e escolha adequada

Quando temos um determinado conjunto de valores, uma forma de obter um modelo matemático é por meio da interpolação polinomial. No entanto, de acordo com Ruggiero e Lopes (2010), quando se necessita de algum valor aproximado da função em algum ponto que não pertença ao intervalo de tabelamento, isto é, quando se quer extrapolar, o uso da interpolação não é recomendado. Além disso, quanto maior é a quantidade de pontos considerados no estudo, maior é o grau do polinômio, e quanto maior o grau, maior é a oscilação da curva interpoladora, isto é conhecido como “fenômeno de Runge”, o que, por sua vez, leva à inadequação da realidade, visto o tema abordado por este trabalho.

Um modo de contornar-se o problema de oscilações geradas pelo “fenômeno de Runge” seria a utilização de *splines* interpoladores; no entanto, visto a característica deste trabalho que utiliza um número total de 46 pontos, além de se querer neste trabalho a obtenção de uma única expressão matemática, ou seja, sem a utilização de funções por partes, a utilização dessa técnica torna-se inadequada.

Em virtude dos fatores citados nos parágrafos anteriores, exclui-se técnicas de modelagem que estejam inseridas na abordagem por interpolação. Desse modo, o método de regressão polinomial torna-se o mais indicado para utilização neste trabalho. Para tanto, o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) é perfeitamente aplicável em casos de regressão polinomial.

## 2.3 O Método dos Mínimos Quadrados

Seja  $n$  um conjunto de pontos  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $y(x) = f(x; a_1, a_2, \dots, a_k)$ , uma função onde  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) são os parâmetros. O MMQ consiste em determinar os valores desses parâmetros de forma que minimize o valor de:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i; a_1, a_2, \dots, a_n) - \bar{y}_i]^2$$

ou seja, deve-se minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os valores de  $\bar{y}_i$  observados e os valores de  $y_i$  ajustados.

Para o caso mais simples do MMQ, isso é, para o ajuste linear, tem-se que este ajuste é da forma  $y(x) = f(x; a, b) = ax + b$ . Deve-se, então, minimizar:

$$S = \sum_{i=1}^n (b + a\bar{x}_i - \bar{y}_i)^2$$

Segundo Ruggiero e Lopes (2010), do Cálculo Diferencial, sabe-se que, para obter um ponto de mínimo de uma função  $f$ , tem-se, primeiramente, que encontrar os seus pontos críticos. Por isso, a equação anterior deve obrigatoriamente satisfazer às seguintes condições:

- Primeira condição:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n 2\bar{x}_i(b + a\bar{x}_i - \bar{y}_i) = 0$$

- Segunda condição:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n 2(b + a\bar{x}_i - \bar{y}_i) = 0$$

Da segunda condição prova-se que  $b = \bar{y} - a\bar{x}$ , onde:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i}{n}$$

Usando-se a primeira condição, é possível mostrar que:

$$a = \frac{\sum \bar{x}_i \bar{y}_i - \sum \bar{x}_i \bar{y}}{\sum \bar{x}_i^2 - \sum \bar{x}_i \bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}_i \bar{y}_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum \bar{x}_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Portanto, os coeficientes  $a$  e  $b$  da reta ajustada  $y = ax + b$  são obtidos por meio das equações anteriores. Essa reta ajustada é comumente denominada “reta de regressão”.

Seja  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais. Para ajustes quadráticos, ou seja, para funções da forma  $y(x) = ax^2 + bx + c$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , estas possuem máximos ou mínimos para  $y$  em intervalos específicos para a variável  $x$ .

Pelo MMQ, quer-se minimizar:

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - y)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2$$

A equação anterior deve satisfazer as seguintes três condições:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial c} = 0$$

Usando-se a equação de  $f(a, b, c)$  e as três condições anteriores, chega-se ao seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} \sum y_i &= a \sum x_i^2 + b \sum x_i + nc \\ \sum x_i y_i &= a \sum x_i^3 + b \sum x_i^2 + c \sum x_i \\ \sum x_i^2 y_i &= a \sum x_i^4 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^2 \end{aligned}$$

O sistema linear anterior pode ser reescrito na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i & n \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

Para determinar os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ , existem vários métodos, como, por exemplo, o Método de Gauss.

Ao elevar em 1 o grau do polinômio, ou seja, ao passar de um ajuste linear para um ajuste quadrático, conforme mostrado anteriormente, exige-se um maior trabalho numérico. O mesmo continua a ocorrer a cada ajuste polinomial de maior grau. Por este motivo, torna-se interessante o uso de recursos computacionais para realizar ajustes de curvas por meio da técnica de regressão.

### 3 METODOLOGIA

De natureza aplicada, com uma abordagem quantitativa, a presente pesquisa utilizou dados referentes à produção anual de leite no Brasil do período entre 1973 e 2018, provenientes da Pesquisa da Pecuária Municipal (PPM), que é elaborada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Além disso, foram utilizados dados da Pesquisa Trimestral do Leite (PTL), também elaborada pelo IBGE.

Para o desenvolvimento do modelo matemático, desenvolvido com embasamento matemático sustentado pela técnica de regressão, bem como para determinação do coeficiente de determinação ( $R^2$ ), foi utilizado como recurso computacional o *software* Microsoft Excel. Para a validação do modelo, utilizaram-se dados da PTL de 2019, bem como, para auxílio computacional, utilizou-se a linguagem de programação GNU Octave.

### 3.1 Dados oficiais

A quantidade de leite de vaca produzida no Brasil é medida anualmente pela Pesquisa da Pecuária Municipal (PPM), realizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). A PPM, sob responsabilidade do IBGE, é realizada desde 1974. Para este trabalho, foram utilizados os dados, anuais, da PPM de 1973 a 2018, que são apresentados na Tabela 1.

**Tabela 1** - Produção anual brasileira de leite de 1973 até 2018

| Ano  | Produção de leite (mil litros) | Ano  | Produção de leite (mil litros) |
|------|--------------------------------|------|--------------------------------|
| 1973 | 6.333.270                      | 1996 | 18.515.391                     |
| 1974 | 7.101.261                      | 1997 | 18.666.011                     |
| 1975 | 7.947.382                      | 1998 | 18.693.915                     |
| 1976 | 8.256.942                      | 1999 | 19.070.048                     |
| 1977 | 9.565.637                      | 2000 | 19.767.206                     |
| 1978 | 9.782.169                      | 2001 | 20.509.953                     |
| 1979 | 10.187.228                     | 2002 | 21.642.780                     |
| 1980 | 11.162.245                     | 2003 | 22.253.863                     |
| 1981 | 11.323.967                     | 2004 | 23.474.694                     |
| 1982 | 11.461.215                     | 2005 | 24.620.859                     |
| 1983 | 11.463.018                     | 2006 | 25.398.219                     |
| 1984 | 11.932.908                     | 2007 | 26.137.266                     |
| 1985 | 12.078.398                     | 2008 | 27.585.346                     |
| 1986 | 12.491.814                     | 2009 | 29.085.495                     |
| 1987 | 12.996.496                     | 2010 | 30.715.460                     |
| 1988 | 13.521.881                     | 2011 | 32.096.214                     |
| 1989 | 14.094.857                     | 2012 | 32.304.421                     |
| 1990 | 14.484.414                     | 2013 | 34.255.236                     |
| 1991 | 15.079.187                     | 2014 | 35.124.360                     |
| 1992 | 15.784.011                     | 2015 | 34.609.588                     |

|      |            |      |            |
|------|------------|------|------------|
| 1993 | 15.590.882 | 2016 | 33.680.401 |
| 1994 | 15.783.557 | 2017 | 33.312.149 |
| 1995 | 16.474.365 | 2018 | 33.839.864 |

Fonte: IBGE (2020).

### 3.2 Modelo matemático

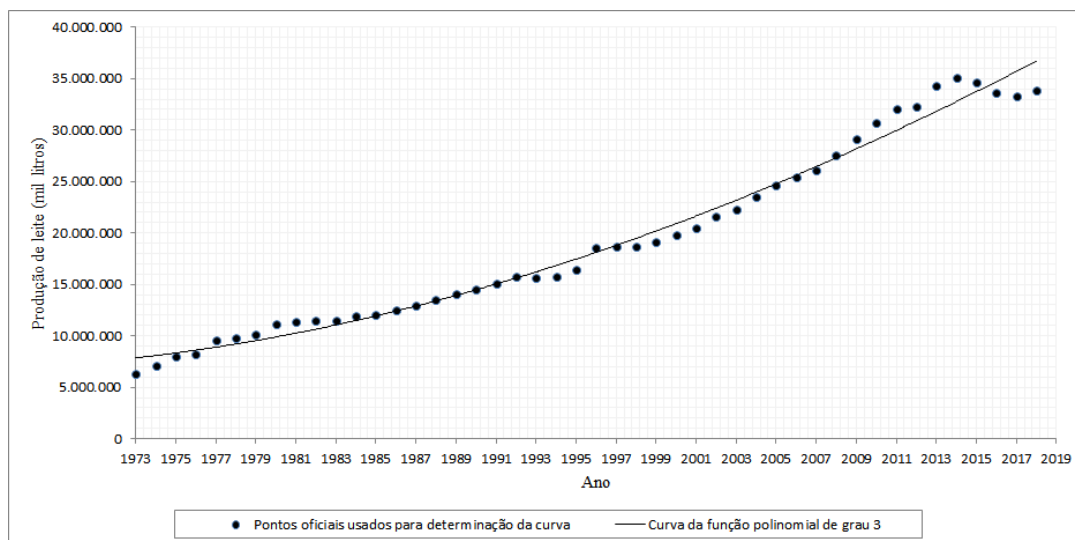
De posse dos dados da Tabela 1, com o auxílio do *software* Microsoft Excel 2010, foi obtido o gráfico de dispersão. Logo, em seguida, por meio de ferramenta própria desse mesmo *software* para obtenção de curvas de regressão, foi obtida uma curva dada por uma função polinomial de grau 3, ou seja, uma equação cúbica:

$$f(x) = -23,43382244447x^3 + 149.171,823368366x^2 - 314.749.643,332806 + 220.303.477.469,507$$

Para determinação da produção de leite, em mil litros, por meio do modelo matemático obtido, basta substituir  $x$  pelo ano correspondente, por exemplo, 2008, na função  $f(x)$ , obtendo para este exemplo o valor de 27.295.378,8514 mil litros de leite, ou seja, de acordo com o modelo a produção de leite, no ano de 2008, foi de aproximadamente 27,9 bilhões de litros.

A escolha dessa equação para efetivamente modelar o problema abordado, deve-se, primordialmente, ao fato de ser uma curva que se ajustou bem aos dados, visto que o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) teve um valor de aproximadamente 0,984; sabendo que, quanto mais próximo de 1, maior é a correlação. Além disso, os valores obtidos de previsão testados para os próximos anos foi um fator crucial para a escolha deste modelo, visto que, para outros modelos obtidos, os valores retornados eram valores muito abaixo ou mesmo negativos, chegando assim a resultados absurdos para o problema abordado, que é a produção nacional de leite.

No Gráfico 1, é possível visualizar o gráfico de dispersão, com os dados oficiais da PPM, juntamente com a curva obtida ajustada a esses dados. Por meio do Gráfico 1, nota-se que a curva se ajusta relativamente bem em relação aos pontos utilizados para realizar a regressão polinomial.

**Gráfico 1** - Representação gráfica da curva obtida que se ajusta aos dados oficiais

#### 4 RESULTADOS E VALIDAÇÃO DO MODELO

Para o cálculo dos valores estimados pelo modelo obtido foi utilizada a linguagem de programação GNU Octave, sendo este um *software* livre, compatível à linguagem de programação MATLAB. Por meio dessa linguagem, também seria possível obter os valores dos coeficientes do polinômio de grau 3; no entanto, visando o caráter didático deste trabalho, fora utilizado o *software* Microsoft Excel, que, apesar de não ser um *software* livre, é amplamente usado no Brasil. Na Tabela 2, encontram-se os valores estimados pelo modelo obtido (Pro. Leite Virtual (mil l)), além da produção de leite oficial (Pro. Leite Of. (mil l)) e das diferenças percentuais (Diferença (%)) para cada ano.

**Tabela 2** - Valores obtidos pelo modelo e diferenças percentuais de 1973 a 2018

| Ano  | Pro. Leite Of. (mil l) | Pro. Leite Virtual (mil l) | Diferença (%) | Ano  | Pro. Leite Of. (mil l) | Pro. Leite Virtual (mil l) | Diferença (%) |
|------|------------------------|----------------------------|---------------|------|------------------------|----------------------------|---------------|
| 1973 | 6.333.270              | 7.854.607,635              | 24,021%       | 1996 | 18.515.391             | 18.116.200,39053           | 2,156%        |
| 1974 | 7.101.261              | 8.082.862,277              | 13,823%       | 1997 | 18.666.011             | 18.787.131,92532           | 0,649%        |
| 1975 | 7.947.382              | 8.331.910,372              | 4,838%        | 1998 | 18.693.915             | 19.475.623,04623           | 4,182%        |
| 1976 | 8.256.942              | 8.601.611,319              | 4,174%        | 1999 | 19.070.048             | 20.181.533,15042           | 5,828%        |
| 1977 | 9.565.637              | 8.891.824,513              | 7,044%        | 2000 | 19.767.206             | 20.904.721,63504           | 5,755%        |
| 1978 | 9.782.169              | 9.202.409,352              | 5,346%        | 2001 | 20.509.953             | 21.645.047,89700           | 5,534%        |
| 1979 | 10.187.228             | 9.533.225,234              | 6,420%        | 2002 | 21.642.780             | 22.402.371,33334           | 3,510%        |
| 1980 | 11.162.245             | 9.884.131,554              | 11,450%       | 2003 | 22.253.863             | 23.176.551,34134           | 4,146%        |
| 1981 | 11.323.967             | 10.254.987,710             | 9,440%        | 2004 | 23.474.694             | 23.967.447,31784           | 2,099%        |

|      |            |                |        |      |            |                  |        |
|------|------------|----------------|--------|------|------------|------------------|--------|
| 1982 | 11.461.215 | 10.645.653,100 | 7,116% | 2005 | 24.620.859 | 24.774.918,66013 | 0,626% |
| 1983 | 11.463.018 | 11.055.987,119 | 3,551% | 2006 | 25.398.219 | 25.598.824,76511 | 0,790% |
| 1984 | 11.932.908 | 11.485.849,166 | 3,746% | 2007 | 26.137.266 | 26.439.025,02975 | 1,155% |
| 1985 | 12.078.398 | 11.935.098,637 | 1,186% | 2008 | 27.585.346 | 27.295.378,85141 | 1,051% |
| 1986 | 12.491.814 | 12.403.594,930 | 0,706% | 2009 | 29.085.495 | 28.167.745,62698 | 3,155% |
| 1987 | 12.996.496 | 12.891.197,442 | 0,810% | 2010 | 30.715.460 | 29.055.984,75333 | 5,403% |
| 1988 | 13.521.881 | 13.397.765,568 | 0,918% | 2011 | 32.096.214 | 29.959.955,62808 | 6,656% |
| 1989 | 14.094.857 | 13.923.158,708 | 1,218% | 2012 | 32.304.421 | 30.879.517,64761 | 4,411% |
| 1990 | 14.484.414 | 14.467.236,257 | 0,119% | 2013 | 34.255.236 | 31.814.530,20963 | 7,125% |
| 1991 | 15.079.187 | 15.029.857,613 | 0,321% | 2014 | 35.124.360 | 32.764.852,71072 | 6,718% |
| 1992 | 15.784.011 | 15.610.882,172 | 1,097% | 2015 | 34.609.588 | 33.730.344,54813 | 2,540% |
| 1993 | 15.590.882 | 16.210.169,333 | 3,972% | 2016 | 33.680.401 | 34.710.865,11893 | 3,060% |
| 1994 | 15.783.557 | 16.827.578,491 | 6,784% | 2017 | 33.312.149 | 35.706.273,82034 | 7,187% |
| 1995 | 16.474.365 | 17.462.969,045 | 6,001% | 2018 | 33.839.864 | 36.716.430,04910 | 8,501% |

Para efetiva verificação do ajuste da curva obtida pelo modelo em relação aos dados reais, foi calculada a diferença média de todos os valores, ou seja, o erro médio, chegando-se ao valor de 4,703%. Com este valor obtido, pode-se concluir que o modelo se ajusta relativamente bem aos dados oficiais do IBGE.

A Pesquisa Trimestral do Leite (PTL) é outra realização do IBGE que visa também verificar a produção nacional de leite de vaca; contudo, sendo seus resultados divulgados trimestralmente. A PTL representa a produção de leite fiscalizada, isto é, a produção obtida por laticínios sob inspeção sanitária. Ao passo que a PPM consegue abranger um número maior de produção leiteira, em virtude da natureza de sua pesquisa, que colhe amostra não somente fiscalizada.

Para validação do modelo obtido, foram utilizados os dados da PTL de 2019. Visto que, em 2016, “a produção de leite fiscalizada correspondeu a 69,0% do total de leite produzido no País” (IBGE, 2017, p. 20), e que “a produção de leite fiscalizada correspondeu a 72,3% do total produzido no Brasil em 2018” (IBGE, 2019, p. 2019). Em virtude dos valores percentuais anteriores (69,0% e 72,3%), será considerado, por hipótese, que, para o ano de 2019, a produção de leite fiscalizada corresponda a 70,6% (média aritmética simples entre 69,0% e 72,3%) do total de leite produzido no Brasil.

De acordo com a PTL de 2019, somando-se os quatro valores trimestrais divulgados, a aquisição de leite realizada por laticínios sob inspeção sanitária, foi de 25.010.285 mil litros, ou seja, foi de aproximadamente 25 bilhões de litros. Considerando que a porcentagem de

leite fiscalizada corresponderá ao valor de 70,6% do total produzido no Brasil em 2019, ter-se-ia 35.425.332,86, isto é, aproximadamente 35,4 bilhões de litros de leite produzidos em 2019 no Brasil. Por meio do modelo matemático obtido, pode-se estimar a produção de leite para o ano de 2019, chegando-se assim ao valor de 37.741.193,203, ou ainda, aproximadamente 37,7 bilhões de litros. Logo, a diferença percentual entre os dois valores obtidos (da porcentagem da PTL de 2019 e do modelo) é de 6,537%.

Portanto, a partir do valor da diferença percentual de 6,537%, que é relativamente próximo do valor médio de todas as diferenças percentuais entre os valores oficiais e os valores estimados pelo modelo, 4,703%, pode-se concluir que o modelo consegue realizar estimativas aceitáveis para o problema abordado. Assim sendo, de acordo com o modelo obtido, para o ano de 2025, a produção brasileira de leite terá um total de 44.188.643,775 mil litros, ou seja, será de aproximadamente 44,2 bilhões de litros.

## **5 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Com a conclusão deste trabalho, pode-se considerar que o objetivo principal de criar um modelo matemático a partir de dados oficiais, por meio de técnica de regressão e uso de recursos computacionais, que seja capaz de estimar a produção brasileira de leite de vaca para os próximos anos, foi alcançado.

A fim de verificar-se o ajuste da curva obtida em relação aos pontos reais e oficiais, foram calculadas as diferenças percentuais entre as medidas oficiais e as medidas previstas pelo modelo, obtendo um valor de erro percentual absoluto médio considerado relativamente pequeno para o tipo de problema abordado, concluindo-se, assim, que o modelo obtido se ajusta bem aos dados reais.

Para validação do modelo, foram utilizados dados da Pesquisa Trimestral do Leite, visto que, para construção do modelo, os dados foram retirados da Pesquisa da Pecuária Municipal, ambos os estudos realizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Também foram realizadas algumas estimativas de produções de leite futuras.

Visto que este trabalho apresenta a conceptualização e efetiva criação de um modelo, procurando explicar a teoria que se encontra por trás do produto final e que, além disso, como os conhecimentos necessários para criação deste tipo de modelo matemático são simples, com ênfase no estudo de regressão polinomial e no domínio de ferramentas computacionais, sendo tais conhecimentos abordados comumente em cursos ao nível de graduação em Matemática,

Estatística, Física, Engenharias, Economia, entre outros, este trabalho possibilitaria a visualização de uma aplicação deste campo de estudo, culminando assim em um recurso didático.

## 6 REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

BRASIL. Ministério da Saúde. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília: Ministério da Saúde, 2014.

BURAK, D. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992. Disponível em: <<http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252996>>. Acesso em: 24 abr. 2020.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - IBGE. **Pesquisa Trimestral do Leite**. 2018. Disponível em: <<https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?view=detalhes&id=72380>>. Acesso em: 30 mar. 2020.

\_\_\_\_\_. **Produção da Pecuária Municipal 2016**. Rio de Janeiro: IBGE, 2017. v. 44.

\_\_\_\_\_. **Produção da Pecuária Municipal 2018**. Rio de Janeiro: IBGE, 2019.

\_\_\_\_\_. **Produção da Pecuária Municipal**. 2020. Disponível em: <<https://biblioteca.ibge.gov.br/index.php/biblioteca-catalogo?view=detalhes&id=784>>. Acesso em: 17 mar. 2020.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, Pearson, 2010.